MAT 314 KOMP. FONK. TEO. GİRİŞ 1. QUİZ SORULARI

1) $\dfrac{(-1+i)(\sqrt{3}-i)}{1+i}$ kompleks sayısını kutupsal biçimde yazınız.

2) $iz^2-(2+3i)z+1+5i=0$ denkleminin köklerini $x+iy$ şeklinde yazınız.

3) $z=1+i$ kompleks sayısı için, aşağıdaki sayıların reel kısmı sıfır olacak şekilde w kompleks sayısını bulunuz. a) $z+w$; b) $z.w$ c) $\dfrac{z}{w}$ d) $\dfrac{w}{z}$

4) Her $z\in\mathbb{C}$ için $|z|\leq|\operatorname{Re}z|+|\operatorname{Im}z|\leq\sqrt{2}.|z|$ eşitsizliğini ispatlayınız.

Not: Süre 50 dakikadır. 07.04.2022

Başarılar

Çözüm1.

· $(-1+i)$ için; $|-1+i|=\sqrt{2}$, $\theta=Arg(-1+i)$,
$\left.\begin{array}{l}\cos\theta=-1/\sqrt{2}\\ \sin\theta=1/\sqrt{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \theta=3\pi/4 \qquad \theta=\pi-\frac{\pi}{4}$
$\Rightarrow -1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

· $(\sqrt{3}-i)$ için; $|\sqrt{3}-i|=2$, $\left.\begin{array}{l}\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=-1/2\end{array}\right\} \Rightarrow \theta=-\pi/6$

$\sqrt{3}-i=2\left(\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6})\right)$

· $(1+i)$ için; $|1+i|=\sqrt{2}$, $\left.\begin{array}{l}\cos\theta=1/\sqrt{2}\\ \sin\theta=1/\sqrt{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \theta=\pi/4$, $1+i=\sqrt{2}(\cos\pi/4+i\sin\pi/4)$

$$\frac{(-1+i)(\sqrt{3}-i)}{1+i}=\frac{\sqrt{2}\left[\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right].2\left[\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6})\right]}{\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]}$$

$$=2.\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}+(-\frac{\pi}{6})-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}+(-\frac{\pi}{6})-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

Çözüm2. $iz^2-(2+3i)z+1+5i=0$ denkleminin köklerini $x+iy$ şeklinde yazınız.

$\Delta=b^2-4ac=[-(2+3i)]^2-4.i.(1+5i)=4+12i-9-4i+20$

$\Delta=15+8i$

$z_{1,2}=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+3i\mp\sqrt{15+8i}}{2i}$,

$\sqrt{15+8i}$, $w=15+8i$, $a=15, b=8>0$, $\mu=1$.

$w_{1,2}=\mp\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}+i\mu\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right)=\mp\left(\sqrt{\frac{15+17}{2}}+i\sqrt{\frac{-15+17}{2}}\right)$

$w_{1,2}=\mp(4+i)$

$z_{1,2}=\frac{2+3i\mp\sqrt{15+8i}}{2i}=\frac{2+3i\mp(4+i)}{2i}$

$z_1=\frac{2+3i+4+i}{2i}=\frac{6+4i}{2i}=\frac{3+2i}{i}=\frac{3i+2.i^2}{i^2}=-3i+2=2-3i$

$z_2=\frac{2+3i-4-i}{2i}=\frac{-2+2i}{2i}=\frac{-1+i}{i}=\frac{-1i-1}{-1}=1+i$

Çözüm 3

3) $z=1+i$ için, aşağıdaki sayıların reel kısmı sıfır olacak şekilde w kompleks sayısını bulunuz.

a) $z+w$ b) $z.w$ c) $\frac{z}{w}$ d) $\frac{w}{z}$

Çözüm: $z=1+i=(1,1)$, $w=x+iy=(x,y)$ olsun.

a) $Re(z+w)=0 \Leftrightarrow 1+x=0 \Rightarrow x=-1$, $y\in\mathbb{R}$ keyfi. $w=-1+y$, $y\in\mathbb{R}$.

b) $Re(z.w)=0 \Leftrightarrow Re(x-y+i(x+y))=0$

$\Rightarrow x-y=0 \Rightarrow w=x+ix=x(1+i)=x.z$ olur. keyfi $x\in\mathbb{R}$.

c) $\frac{z}{w}=\frac{1+i}{x+iy}\cdot\frac{x-iy}{x-iy}=\frac{x+y+i(x-y)}{x^2+y^2}$

$\Rightarrow Re\left(\frac{z}{w}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{x+y}{x^2+y^2}=0 \Rightarrow x=-y$, $x\neq 0$

$w=x+iy=x-ix=x(1-i)$, $x\neq 0$, $x\in\mathbb{R}$.

d) $\frac{w}{z}=\frac{x+iy}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{x+y+i(x-y)}{2} \Rightarrow$

$Re\left(\frac{w}{z}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{x+y}{2}=0 \Rightarrow x=-y$, $w=x(1-i)$, $x\in\mathbb{R}$.

4) Her $z\in\mathbb{C}$ için $|z|\leq|Re z|+|Im z|\leq\sqrt{2}.|z|$ eşitsizliğini ispatlayınız.

Çözüm: $|z|=\sqrt{(Re z)^2+(Im z)^2}\leq\sqrt{(|Re z|+|Im z|)^2}$

$=|Re z|+|Im z|$

$\Rightarrow \boxed{|z|\leq|Re z|+|Im z|}$ ol. (1)

$(|Re z|-|Im z|)^2\geq 0 \Rightarrow$

$|Re z|^2+|Im z|^2-2|Re z||Im z|\geq 0$

$|z|^2-2|Re z||Im z|\geq 0$

$|z|^2\geq 2|Re z||Im z|$ her iki yana $|z|^2$ eklenirse

$2|z|^2\geq 2|Re z||Im z|+|z|^2=2.|Re z||Im z|+|Re z|^2+|Im z|^2$

$=(|Re z|+|Im z|)^2$

$\Rightarrow 2|z|^2\geq(|Re z|+|Im z|)^2 \Rightarrow \sqrt{2}|z|\geq|Re z|+|Im z|$ (2)

(1)(2) $\Rightarrow$ istenen bulunur.